MAT497 Dönüşümler ve Geometriler BütünlemeSınav Cevap Anahtarı(06.02.2024)

1.) $R_1 . . . \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$

dönüşümü veriliyor. $R_1 R_2$bir öteleme olacak şekilde $(2,1)$ noktası etrafında bir R_2 dönmesi bulunuz**(20 P.)**.

Çözüm: R_1 orijin etrafında π açılı dönme olup, $R_1 R_2$ nin öteleme olması için R_2 nin β dönme açısı $\beta + \pi = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$,olacak şekilde seçilmelidir. Buna göre, $\beta = \pi$ alınırsa

$O'(h,k)$noktası etrafında β açılı bir dönme denkleminin

$$R_2 . . . \begin{cases} x' = x cos\beta - y sin\beta + a \\ y' = x sin\beta + y cos\beta + b \end{cases}$$

olduğunu biliyoruz. Burada,

$$\begin{cases} a = h(1 - cos\beta) + k sin\beta \\ b = k(1 - cos\beta) - h sin\beta \end{cases}$$

dır.

Dönme merkezi $(2,1)$ ve dönme açısı π olan değerler yukarıda yerlerine yazılır ise

$$R_2 . . . \begin{cases} x' = x cos\pi - y sin\pi + 2.(1 - cos\pi) + 1. sin\pi \\ y' = x sin\pi + y cos\pi + 1.(1 - cos\pi) - 2. sin\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow R_2 . . . \begin{cases} x' = -x + 2.(1 - (-1)) + 1.0 \\ y' = -y + 1.(1 - (-1)) - 2.0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow R_2 . . . \begin{cases} x' = & -x + 4 \\ y' = & -y + 2 \end{cases}$$

elde edilir. Buna göre,

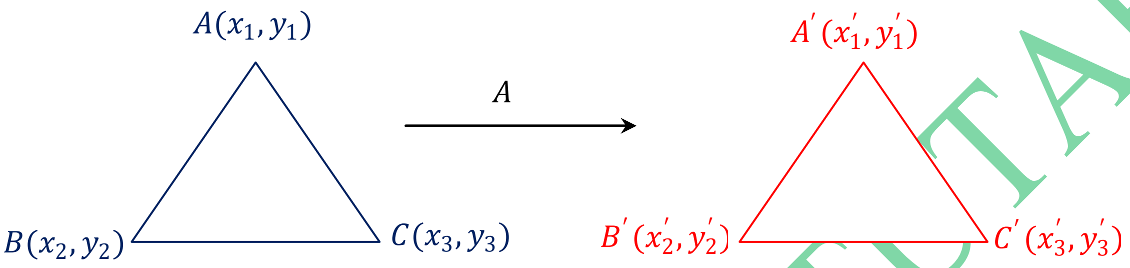
$$\Rightarrow R_1 R_2 . . . \begin{cases} x' = & x - 4 \\ y' = & y - 2 \end{cases}$$

ötelemesi olur.

2.) $A\,.\,.\begin{cases} x' &= x \\ y' &= cx+dy \end{cases} \quad c,d \neq 0,$

ilkel afin dönümü altında bir üçgenin alanı ile esas üçgenin alanı arasındaki ilişkiyi araştırınız. Bundan faydalanarak A ilkel afin dönüşümü altında iki üçgenin alanları oranının korunup-korunmadığını araştırınız**(20 P.)**.

Çözüm: $A\,.\,.\begin{cases} x' &= x \\ y' &= cx+dy \end{cases}, \quad \Delta = d \neq 0,$



Esas üçgenin alanına S dersek, $2S = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ dir. Bu durumda A ilkel dönüşümü altındaki üçgenin alanı

$$2S' = \begin{vmatrix} x_1' & y_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \\ x_3' & y_3' & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & cx_1+dy_1 & 1 \\ x_2 & cx_2+dy_2 & 1 \\ x_3 & cx_3+dy_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & cx_1 & 1 \\ x_2 & cx_2 & 1 \\ x_3 & cx_3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & dy_1 & 1 \\ x_2 & dy_2 & 1 \\ x_3 & dy_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow 2S' = c\underbrace{\begin{vmatrix} x_1 & x_1 & 1 \\ x_2 & x_2 & 1 \\ x_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}}_{0} + d\underbrace{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}_{2S} \Rightarrow 2S' = d.2S \Rightarrow S' = d.S \text{bulunur.}$$

Şimdi, A ilkel afin dönüşüm altında iki üçgenin alanları oranının korunup-korunmadığına bakalım:

$\frac{S_1'}{S_2'} = \frac{d.S_1}{d.S_2} \Rightarrow \frac{S_1'}{S_2'} = \frac{S_1}{S_2}$olduğundan alanları oranı korunur.

3.) $T\ldots\begin{cases}x' = & x-y\\ y' = & y\end{cases}$ dönüşümü veriliyor. Bu dönüşümün $d\ldots x+y+1=0$ doğrusu üzerindeki uzaklıkları nasıl değiştirdiğini araştırınız **(50 P.)**.

ÇÖZÜM: $P_i(x_i, y_i) \in d, \quad i = 1{,}2,$ olsun. Bu durumda;

$x_i + y_i + 1 = 0 \Rightarrow x_i = -1 - y_i$ (■) dir. $d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-1 - y_2 - (-1 - y_1))^2 + (y_2 - y_1)^2} \Rightarrow d(P_1, P_2) = \sqrt{(-1 - y_2 + 1 + y_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{2(y_2 - y_1)^2}$ dir.

$$P_i'(x_i', y_i') = T(P_i) = (x_i - y_i\,, y_i), \qquad i = 1{,}2$$

$$d(P_1', P_2') = \sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2} = \sqrt{(x_2 - y_2 - x_1 + y_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\Rightarrow d(P_1', P_2') \underbrace{=}_{(■)\text{ dan}} \sqrt{(-1 - y_2 - y_2 + 1 + y_1 + y_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\Rightarrow d(P_1', P_2') = \sqrt{(2y_1 - 2y_2)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{5(y_2 - y_1)^2}$$

$\Rightarrow d(P_1', P_2') = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} d(P_1, P_2) = \frac{\sqrt{10}}{2} d(P_1, P_2)$ elde edilir.

4.) Afin dönüşümlerin kümesi$\mathcal{A}$ olmak üzere

$$A_1 \ldots \begin{cases} x' = ax + by + m \\ y' = cx + dy + n \end{cases},$$

ve

$$A_2 \ldots \begin{cases} x'' = A\,x' + B\,y' + M \\ y'' = C\,x' + D\,y' + N \end{cases}$$

iki afin dönüşüm olsun. A_2A_1 nin bir afin dönüşüm olduğunu gösteriniz**(50P.)**.

Çözüm:$A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ için $A_2A_1 \in \mathcal{A}$ olduğunu göstermeliyiz.

$$A_2A_1 \ldots \begin{cases} x'' = A(ax + by + m) + B(cx + dy + n) + M \\ y'' = C(ax + by + m) + D(cx + dy + n) + N \end{cases}$$

$$\Rightarrow A_2A_1 \ldots \begin{cases} x'' = \overbrace{(aA + cB)}^{a_1}x + \overbrace{(bA + dB)}^{b_1}y + \overbrace{(mA + nB + M)}^{m_1} \\ y'' = \underbrace{(aC + cD)}_{c_1}x + \underbrace{(bC + dD)}_{d_1}y + \underbrace{(mC + nD + N)}_{n_1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A_2A_1 \ldots \begin{cases} x'' = a_1x + b_1y + m_1 \\ y'' = c_1x + d_1y + n_1 \end{cases}$$

bulunur. Acaba $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} \neq 0$mıdır ?

$A_1 \in \mathcal{A}$olduğundan$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$,

$A_2 \in \mathcal{A}$ olduğundan $\Delta_2 = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = AD - BC \neq 0$dır.

$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} = a_1.d_1 - b_1.c_1 = (aA + cB)(bC + dD) - (bA + dB)(aC + cD)$

$\Rightarrow \Delta = abAC + adAD + bcBC + cdBD - abAC - bcAD - adBC - cdBD$

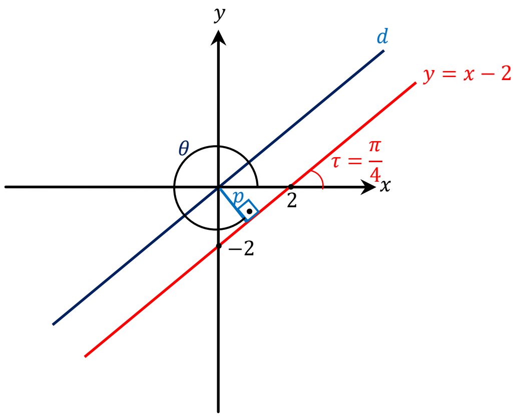
$\Rightarrow \Delta = ad(AD - BC) - bc(AD - BC)$

$\Rightarrow \Delta = \underbrace{(AD - BC)}_{\neq 0}\underbrace{(ad - bc)}_{\neq 0} \neq 0$

dır. O halde $A_2A_1 \in \mathcal{A}$dır.

5.) $y = x - 2$ doğrusuna göre yansımanın denklemini bulunuz. Bu yansıma altında $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 1$geometrik şeklin resmini bulunuz**(20 P.)**.

Çözüm: $y = x - 2 \Rightarrow tan\tau = 1 \Rightarrow \tau = \frac{\pi}{4}$ dir. $\theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$dir.



Not: (x_0, y_0)noktasının$ax + by + c = 0$ doğrusuna uzaklığı $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$dir.

$x - y - 2 = 0,\ (x_0, y_0) = (0,0)$ dan $a = 1, b = -1, c = -2,$

$p = \frac{|1.0 + (-1).0 - 2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ dir.

Orijinden geçmeyen herhangi bir doğruya göre yansıma denkleminin

$$R \ \cdots \ \begin{cases} x' = xcos2\tau + ysin2\tau + 2p.cos\theta \\ y' = xsin2\tau - ycos2\tau + 2p.sin\theta \end{cases}$$

olduğunu biliyoruz. Bu denklemde $\tau = \frac{\pi}{4}, p = \sqrt{2}, \theta = \frac{7\pi}{4}$ değerleri yerlerine yazılırsa

$$R \ \cdots \ \begin{cases} x' = y + 2.\sqrt{2}.\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right) \\ y' = x + 2.\sqrt{2}.\left(-\frac{2}{\sqrt{2}}\right) \end{cases} \Rightarrow R \ \cdots \ \begin{cases} x' = y + 2 \\ y' = x - 2 \end{cases} \Rightarrow R^{-1} \ \cdots \begin{cases} x = y' + 2 \\ y = x' - 2 \end{cases}$$

bulunur.

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 1 \Rightarrow (y' + 2 - 3)^2 + (x' - 2 - 1)^2 = 1$$
$$\Rightarrow (y' - 1)^2 + (x' - 3)^2 = 1$$

Not: $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 1$çemberinin merkezi olan $(3,1)$ noktası $y = x - 2$ doğrusu üzerinde olduğundan bu çemberin resmi kendisidir.